

独立な2標本の母平均値の差の検定

高木 廣文
東邦大学医学部看護学科
国際保健看護学研究室

例題

Q. 急性膀胱炎患者を無作為に2群に分け、各50例に対して、一方に新薬Aを投与し、他方に旧薬Bを投与した。症状消失に関して

A群：平均 3.1日 標準偏差 1.2日
B群： 5.3日 0.8日

この成績から、A薬はB薬より優れているといえるだろうか。

検定のための統計理論

- 2つの母平均値の差の検定：
2群の母分散が

- (1) 等しい場合
- (2) 等しくない場合

(1) 母分散が等しいものと仮定できる場合、
「等分散の検定」で有意差なしの場合

母分散の等しい場合

- 記号の定義など：
 - ・ 2群A, Bの標本数： m, n
 - ・ 母集団での分布が正規分布に従う
 - ・ A, B群の平均値： \bar{x}, \bar{y}
 - ・ A, B群の不偏分散： $\hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_y^2$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2$$

母分散が等しい場合の検定統計量

$$t_0 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{(m-1)\hat{\sigma}_x^2 + (n-1)\hat{\sigma}_y^2}{m+n-2} \times \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

$\nu = m+n-2$ の t 分布に従う

$t_0 \geq t_{\alpha/2}(\nu) \rightarrow$ 水準 α で有意差あり
 $t_0 < t_{\alpha/2}(\nu) \rightarrow$ 有意差なし (保留)

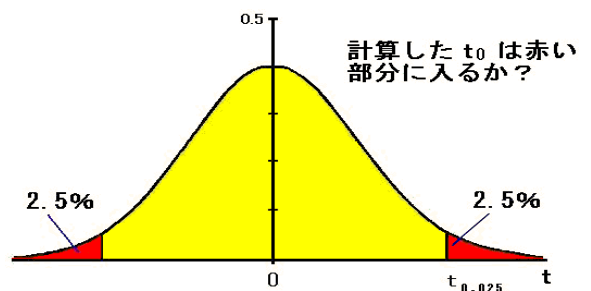


図 t 検定の考え方

● 例題の計算:

$$t_0 = \frac{|3.1 - 5.3|}{\sqrt{\frac{(50-1) \times 1.2^2 + (50-1) \times 0.8^2}{50+50-2} \times \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right)}} = 10.786$$

t_0 の自由度: $\nu = (50+50-2) = 98$

有意確率: $p = 0.000$

● 検定の結果:

t 分布の自由度98の両側 5%点, 1%点, 0.1%点は, 1.986, 2.629, 3.397

⇒ 全て $t_0 (=10.786)$ の方が大きい。

⇒ 有意水準0.1%で母平均値に有意差が認められる。($p = 0.000$)

【結論】

A薬は旧薬Bに比べ、症状消失に関して優れた効果を持つと考えられる。

等分散の検定

- ・ 2群A, Bについて標本数をm, n
- ・ A群: 母平均 μ_A , 母分散 σ_A^2 の正規分布
- ・ B群: 母平均 μ_B , 母分散 σ_B^2 の正規分布

通常の t 検定の方法:

2つの母分散: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ の場合

仮説「 $\mu_A = \mu_B$ 」を検定する方法。

- ・ 母分散が等しいことの確認が必要。

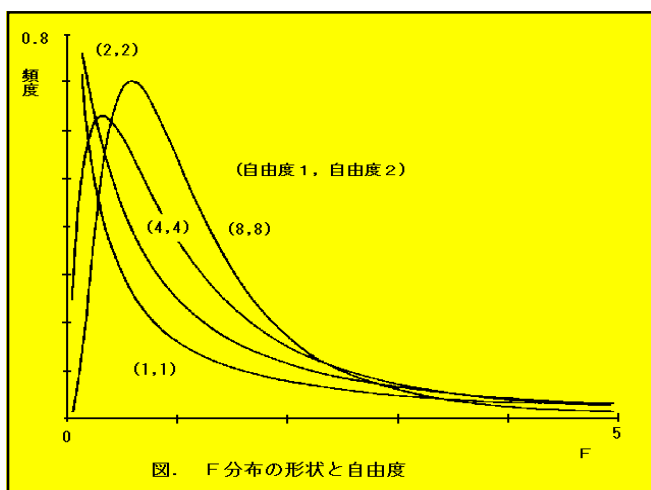
「等分散の検定」

帰無仮説「 $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ 」の検定

$$F_0 = \frac{\hat{\sigma}_A^2}{\hat{\sigma}_B^2}$$

各群の不偏分散: $\hat{\sigma}_A^2, \hat{\sigma}_B^2$

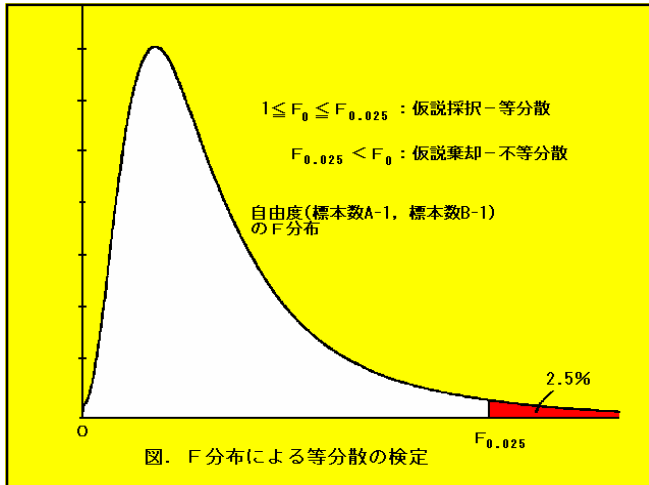
- ・ F_0 は自由度 (m-1, n-1) のF分布に従う。
- ・ $1/F_0$ は自由度 (n-1, m-1) のF分布に従う。



● F分布での両側検定

両側 α の確率で検定:

- ・ 自由度 (ν_1, ν_2) のF分布の上側 $\alpha/2$ 点を $F_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$:
- ・ $F_0 > F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$ または $1/F_0 < F_{\alpha/2}(n-1, m-1)$
- ⇒ 帰無仮説を棄却。
 - ・ 等分散ではない → 「不等分散」
 - それ以外: → 仮説を採択: 「等分散」を仮定。



●例題の計算

例題について、「等分散の検定」:

$$F_0 = \frac{1.2^2}{0.8^2} = 2.25$$

- F_0 は自由度(49, 49)のF分布に従う。
- F分布の上側2.5%点は約1.76。

$$\Rightarrow F_0 > 1.76$$

両側5%水準で等分散の仮説は棄却。
2群の母分散には有意差がある。

Welchの方法-1

- 2つの母分散の等分散性を仮定しない。
- 仮説「 $\mu_A = \mu_B$ 」を検定する方法:
⇒ 「Welch (ウェルチ) の方法」

Welchの方法-2

$$t_0 = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{m} + \frac{\hat{\sigma}_y^2}{n}}}$$

Welchの方法-3

t_0 はt分布に従うが、自由度 ν :

$$\nu = \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_x^2}{m} + \frac{\hat{\sigma}_y^2}{n}\right)^2}{\frac{\hat{\sigma}_x^4}{m^2(m-1)} + \frac{\hat{\sigma}_y^4}{n^2(n-1)}}$$

【例題 (再掲)】

急性膀胱炎患者 . . .

各群の標本数は50例、症状消失までの日数と標準偏差SD (不偏分散の平方根) は、

A群: 平均 3.1日, SD 1.2日

B群: 5.3日, 0.8日

であった。

この成績から、A薬はB薬より優れているといえるだろうか。

例題の計算-1

$$t_0 = \frac{|3.1 - 5.3|}{\sqrt{\frac{1.2^2}{50} + \frac{0.8^2}{50}}} = 10.786$$

例題の計算-2

t_0 の自由度 ν :

$$\nu = \frac{\left(\frac{1.2^2}{50} + \frac{0.8^2}{50}\right)^2}{\frac{1.2^4}{50^2 \times (50-1)} + \frac{0.8^4}{50^2 \times (50-1)}} = 85.4$$

例題の計算-3

自由度85の t 分布表の両側0.1%点は3.411

⇒ $t_0 > 3.411$ → 高度に有意
($p = 0.000$)

【結論】

A薬はB薬に比べ、平均としての効果は優れている。

ただし、効果の現れ方について、より個体差が大きいものと考えられる。

練習問題

高血圧症の患者24名と健常者21名の1日あたりの塩分摂取量を調べたところ、平均値は高血圧症群で20g/日、健常者群10g/日であった。また、不偏分散から求めた標準偏差は高血圧症群10g/日、健常者群5g/日であった。

- (1) 等分散を仮定した2群の母平均値の差の検定を行え。
- (2) 等分散の検定を行え。
- (3) Welchの検定を行え。