

対応のある場合の検定

高木 廣文
東邦大学医学部看護学科
国際保健看護学研究室

1

対応のある場合の2群の比較

1. 対応のある2標本の母平均値の差の検定 【例題】

頻尿患者10例について、A薬の投与前と1週間後の1日あたりの排尿回数を調べたところ、以下の表のようになった。このデータから、A薬の治療効果はあるといえるだろうか。

2

表. 薬物投与前と1週間後の排尿回数

患者	前	後	前後の差
1	20	12	8
2	13	8	5
3	9	7	2
4	12	14	-2
5	15	13	2
6	9	10	-1
7	18	10	8
8	14	9	5
9	25	17	8
10	16	11	5

3

対応のある場合の検定の方法

●各種の定義：

- ・ 標本数 n
- ・ ある処理の前後での変数の測定値： $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$
- ・ これらの変数は、母集団で独立に正規分布に従っているものと仮定

4

対応のある場合の「処理」とは？

●ある「処理」とは何か？

- ・ 「特定の薬物を服用させる」
- ・ 「手術をする」
- ・ 「食事指導を行う」

など対象に介入すること

- 処理の前後での測定値の差があるか否かを検討するための方法が必要。

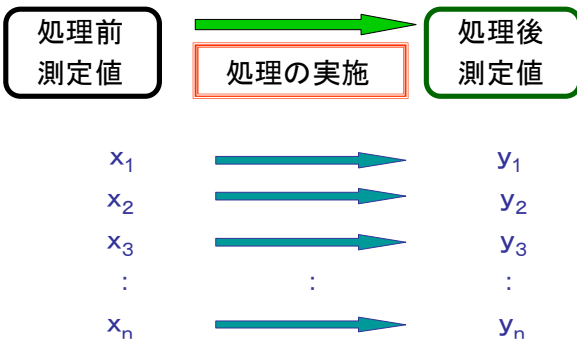
5

エステの効果は？



6

ある処理の効果は？



7

検定のための計算

● 処理の前後の測定値の差

- ・ $d_i = x_i - y_i$ ($i=1, 2, \dots, n$)
- ・ 差の平均値 d_M
- ・ 差の不偏分散 S^2

$$d_M = 1/n \cdot \sum_i d_i$$

$$S^2 = 1/(n-1) \cdot \sum_i (d_i - d_M)^2$$

8

検定のための統計量

帰無仮説「差はない： $\delta = 0$ 」

$$t_0 = \frac{|d_M|}{(S/\sqrt{n})}$$

t_0 ：自由度 $\nu = n - 1$ の t 分布

両側 α 点（5%か1%）の値 $t_{\alpha/2}(\nu)$ ：

$t_0 \geq t_{\alpha/2}(\nu) \rightarrow$ 水準 α で有意差あり

$t_0 < t_{\alpha/2}(\nu) \rightarrow$ 態度保留（有意差なし）。

対応のあるデータでは相関がある

「対応のあるデータ」の検定は、特定の変数の分布がある処理により、値の大きい方向（もしくは小さい方向）に全体として「ずれ」が生じたか否かを検定。

処理の前後の測定値間には相関が認められるはず

測定値間に相関が認められない場合、この検定方法は不適切

10

計算例

表の最右欄に示したように、投与前後での排尿回数の差を求め、計算に使用：
差の平均 d_M 、差の不偏分散 S^2 ：

$$d_M = (8 + 5 + \dots + 5) / 10 = 4$$

$$S^2 = \{(8-4)^2 + \dots + (5-4)^2\} / 9 = 13.333$$

$$t_0 = 4 / \sqrt{13.333 / 10} = 3.464$$

11

計算例-2

t_0 は自由度 $(10-1)=9$ の t 分布に従う。
自由度9の t 分布の両側5%点と1%点は2.262、3.250。

$\Rightarrow t_0 = 3.464 > 2.262$ 、および 3.250

\Rightarrow 1%水準で有意差が認められる。

【結論】

A薬による治療効果は有効なものと考えてよい。

【参考】A薬投与前後の排尿回数の単相関係数

$\Rightarrow 0.680$ (5%水準で有意)

12

●符号検定による比較

前述の例題の頻尿患者のデータについて、排尿回数の差の値自体にあまり意味がなく、かつ母集団で正規分布を仮定することに無理があるものとして、A薬の効果があつたかないかを調べてみよう。

13

●符号検定の統計学的理論

- ・標本は、 n ペアからなる。
ペア：患者－対照（健常者）
治療薬－標準薬、処理の前後など
- ・一方の群にある処理を施し、これをAとし、他方をBとする：
処理の効果の情報（データ）として：
 - ・特定の変数についての量的な測定値。
 - ・「Aの方がBより有効である」といった質的なもの。

14

●符号検定の統計学的理論2

- ・各ペアについて、AがBよりよい結果を与えている場合に「+」とし、逆の場合を「-」、どちらも同一の結果（0のタイのある場合）を示していれば、それは以後の分析から除外する。
- ・正を示したペアの個数： n_+
- ・負を示したペアの個数： n_-
- ・全ペア数 N ： $N = n_+ + n_-$

15

●符号検定の統計学的理論3

【帰無仮説】

処理の効果がなければ、各ペアで正になるか負になるかは、どちらの可能性も等しく、確率は $1/2$ となる。

- ・ N 個中 n_+ 個以上が正となる確率 p_0
- ・ N 個中 n_- 個以下が負となる確率と一致

2項分布による確率計算

16

●符号検定の統計学的理論4

$$p_0 = \sum_{k=n_+}^N \frac{N!}{(N-k)! \cdot k!} \cdot (1/2)^N$$

$$= \sum_{k=0}^{n_-} \frac{N!}{(N-k)! \cdot k!} \cdot (1/2)^N$$

17

●符号検定の統計学的理論5

有意確率の計算は、+-の符号の付け方とは無関係！

【注意】

p_0 の確率は一定方向の偏りについて計算（片側確率）。

- ・一般には p_0 を2倍（両側確率）。
- ・ $2 p_0$ が 0.05 以下ならば有意とする。（仮説棄却）

18

●正規近似による有意確率の計算:

ペアの個数Nが大きくなると、確率計算はやや煩雑になる。

⇒ 標準正規分布による近似により、検定を行うと便利:

$n_+ > n_-$ とする。

正の個数の期待値 $E(n_+)$, 分散 $V(n_+)$:

$$E(n_+) = N/2 \quad V(n_+) = N/4$$

●正規近似による有意確率の計算2

$$z_0 = \frac{2n_+ - N - 1}{\sqrt{N}}$$

z_0 : Nが大きければ標準正規分布に従う。「連続性の補正」を行っている。

$z_0 > 1.96$ → 両側5%水準で有意差あり

$z_0 > 2.58$ → 両側1%水準で有意差あり

20

例題

表. 符号検定のための表

前後の差	8	5	2	-2	2	-1	8	5	8	5
符号	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+

検定のための計算:

A薬投与前後の排尿回数の増減のみに着目する。投与前の排尿回数が投与後より大きい場合に「+」、小さい場合に「-」とする。

21

例題2

- 正が8個, 負が2個。
10例中8例以上が正となる確率 p_0 :

$$p_0 = \sum_{k=8}^{10} \frac{10!}{(10-k)! \cdot k!} \cdot (1/2)^{10}$$

$$= (1 + 10 + 10 \times 9/2) \times (1/2)^{10} = 0.05469$$

$$\Rightarrow 2 \times p_0 = 0.109$$

⇒ 5%水準で有意とはならない。

22

Wilcoxonの符号付順位和検定

データについて、たんにA薬投与前後の排尿回数の大小をもとに符号検定を行うのではなく、排尿回数の差の数値自体は用いないものの、その符号と大きさの順位をデータとしてA薬の効果を検定する。

23

符号付順位和検定の統計学的理論

- ・ Nペアの標本の対があるものとする。
- ・ まず、各対での特定の変数の測定値の差を求める。
- ・ 次に、これらの差について符号を無視して、小さい順(大きい順でもよい)に順位をつける。
- ・ 最後に、差の値の符号が負のものには、その順位にも負の符号を付ける。

【注意】

差に0の対はなく、また差の値(絶対値をとった場合にも)が等しいものはないものとする。

24

符号付順位和検定の統計学的理論 2

- ・ 正の符号をもつ順位が s_1, s_2, \dots, s_n と n 個。
- ・ 負の符号をもつ順位は、絶対値をとったものが、 r_1, r_2, \dots, r_m と m 個。
- ・ 正の符号の順位和を S 、負の符号の順位和を R :

$$\begin{aligned} S &= s_1 + s_2 + \dots + s_n \\ R &= r_1 + r_2 + \dots + r_m \\ S + R &= N(N+1)/2 \end{aligned}$$

25

符号付順位和検定の統計学的理論 3

- S と R は交換可能 \Rightarrow 差の方向は任意
検定の方法 : $S > R$ とすると、

$$S \geq c_1 \text{ or } R \leq c_2 \rightarrow \text{有意差あり}$$

c_1 と c_2 は定数で S が c_1 以上となる確率と R が c_2 以下の確率が等しいように定める。

- ・ 定数 c_1 もしくは c_2 は、符号付順位和検定のための統計数値表が必要。

26

●正規近似による確率計算

- ・ タイの種類が k 個あり、タイの小さい方から各タイには d_1 個、 d_2 個、 \dots 、 d_k 個のケースが含まれるとする :
- ・ 正の符号の順位和 S^* の期待値 $E(S^*)$ 、分散 $V(S^*)$:

$$\begin{aligned} E(S^*) &= N(N+1)/4 \\ V(S^*) &= N(N+1)(2N+1)/24 \\ &\quad - [\sum_i (d_i^3 - d_i)]/48 \end{aligned}$$

27

●正規近似による確率計算2

- ・ 正規近似 :

$$z_0 = \frac{|S^* - E(S^*)|}{\sqrt{V(S^*)}}$$

z_0 : 標準正規分布に従う。

$$z_0 > 1.96 \rightarrow \text{5\%水準で有意差あり。}$$

- ・ タイのない場合 : $d_1 = d_2 = \dots = d_N = 1$

28

表. 符号付順位和検定のための表

差	差の絶対値の順位	符号付順位
8	9	9
5	6	6
2	3	3
-2	3	-3
2	3	3
-1	1	-1
8	9	9
5	6	6
8	9	9
5	6	6

29

検定のための計算

- ・ まず、排尿回数の前後の差を求める。
- ・ 次に、差のデータについて、その絶対値(符号を無視したもの)について小さい順に、順位を付ける。もしも数値が等しいものがあれば、その中間順位を与える。
- ・ 順位を与えた後で、各順位についてもとの差と同じ符号を付ける。
これは差が負の値の順位に「-」を付けることを意味する。

30

検定のための計算2

・正の順位和 S^* 、負の順位和を R^* :

$$S^*=9+6+3+3+9+6+9+6=51$$
$$R^*=3+1=4$$

標本数10で、正の順位和が51以上となる確率を求めればよい。

これは負の順位和が4以下となる確率に一致。負の順位和が4以下となる確率を求める。

31

検定のための計算3

・正の順位和 S^* 、負の順位和を R^* :

$$S^*=9+6+3+3+9+6+9+6=51$$
$$R^*=3+1=4$$

標本数10で、正の順位和が51以上となる確率を求めればよい。

これは負の順位和が4以下となる確率に一致。負の順位和が4以下となる確率を求める。

32

検定のための計算4

表. 順位和が4以下となる組み合わせ

順位和	順位の組	場合の数
0	空集合	1
1	(1)	1
3	(3)	3
4	(1, 3)	3
合計	—	8

* 順位和が2となる場合はない。

33

検定のための計算5

・10個の標本について可能な符号の組合せの数:

$$2^{10}=1024$$

・負の順位和が4以下となる確率:

$$p_0=8/1024=0.0078125$$

$$\Rightarrow 2 \times p_0=0.015625$$

約1.6%で有意差が認められることになる。

結論: A薬の治療効果があると考えてよい。

34

●例題について正規近似を用いる

$$E(R^*)=10 \times (10+1)/4=27.5$$

$$V(R^*)=10 \times (10+1) \times (2 \times 10+1)/24$$
$$- \{(3^3-3)+(3^3-3)+(3^3-3)\}/48$$
$$=96.25-1.5=94.75$$

$$\Rightarrow z_0=|4-27.5|/\sqrt{94.75}=2.414$$

⇒ 標準正規分布の両側約1.58%に相当する。

● 標本数が10程度でも正規分布による近似は、実際の検定に十分。

35

●重要

- ・同一の例題について異なる3種類の検定法を用いてみた。結果をみると、t検定によるものとWilcoxonの符号付順位和検定の結果は、t検定がやや有意確率が小さくなるものの、大差ないものとなっている。
- ・符号検定は他の2つの検定に比べ効率が悪いようである。この理由は、符号検定が差についての符号の情報しか用いないためである。数値自体に意味があり、変数の母集団での分布として正規分布を仮定することに無理がなければ、t検定を用いるべきである。
- ・しかし、数値に絶対的な意味がなく、分布に正規性を仮定するのも無理があれば、符号付順位和検定が適しているだろう。符号検定は、数値もその順位も利用できない場合に有効な手法といえる。なお、符号検定の特殊なケースの近似計算として「McNemarの検定」と呼ばれる方法がある。

36

●練習問題

表. 減塩指導前後の塩分摂取量

前	後	
80	78	1) 符号検定を行え。
90	88	2) t 検定を行え。
66	65	
75	70	3) 符号付順位和検定 を行え。
85	80	
75	75	
70	68	
69	65	

37