

ノンパラメトリック検定

高木 廣文
東邦大学医学部看護学科
国際保健看護学研究室

1

ノンパラメトリック検定とは

- 2グループの比較をデータの順位に基づいて行う方法
- 母集団分布が正規分布を仮定できない
- 測定値の数値自体に信頼性が低い

2

【例題】

急性腎盂腎炎患者に対して、無作為にA薬とB薬を投与し、下熱日数を調べたところ、表の「日数欄」に示したようなデータが得られた。
A薬とB薬では下熱日数に差があるといえるだろうか。

表. A薬とB薬の投与による下熱日数

A薬: 日数	2	2	2	3	3	4	4	4	6	8	*	*
B薬: 日数	2	3	3	3	4	4	5	8	10	*	*	*

*は下熱せず

3

●順位をつける

- ・ 2つのグループ全体で、数値の順に順位をつける。
- ・ 同順位の場合には、中間順位を与える。

表. A薬とB薬の投与による下熱日数とその順位

A薬: 日数	2	2	2	3	3	4	4	4	6	8	*	*
順位	2.5	2.5	2.5	7	7	12	12	12	16	17.5	22	22
B薬: 日数	2	3	3	3	4	4	5	8	10	*	*	*
順位	2.5	7	7	7	12	12	15	17.5	19	22	22	22

*は下熱せず

4

●順位を用いた検定の理論

A群, B群の無作為抽出標本数: m, n
($N = m + n$)

A群のデータ: x_1, x_2, \dots, x_m

B群のデータ: y_1, y_2, \dots, y_n

【重要】

データは以下の形式のどれでもよい。

- ・ 血圧, 体重などのように量的なもの
- ・ 歌のうまさなどの順位
- ・ 著効・有効など, カテゴリ間に自然な順序のあるもの

5

●順位和の計算

- ・ いまデータに同順位はないものとする。
- ・ 全体でNこのデータに1からNまで順位をつける

— A群のデータ: s_1, s_2, \dots, s_m

B群のデータ: r_1, r_2, \dots, r_n

- ・ 順位和:

A群 $R_A = s_1 + s_2 + \dots + s_m$

B群 $R_B = r_1 + r_2 + \dots + r_n$

($R_A + R_B = N(N + 1) / 2$)

6

●検定の方法

- ・簡単のため, $R_A > R_B$ とする
- ・適当な定数 c_1, c_2 を定めて (数値表)

$$R_A > c_1 \quad \text{または} \quad R_B < c_2$$

2群に有意差ありとする。

有意水準 α :

$$\Pr(R_A > c_1) = \Pr(R_B < c_2) = \alpha/2$$

7

Mann-WhitneyのU検定

- ・順位和から期待される最小値を引く

・U統計量

$$A \text{ 群} : U_A = R_A - m(m+1)/2$$

$$B \text{ 群} : U_B = R_B - n(n+1)/2$$

- ・適当な定数 u_1, u_2 を定めて (数値表)

$$U_A > u_1 \quad \text{または} \quad U_B < u_2$$

8

正規分布による近似

- ・標本数が比較的大きい場合 :
A群の順位和 R_A の期待値 $E(R_A)$
順位和 R_A の分散 $V(R_A)$

$$E(R_A) = m(N+1)/2$$

$$V(R_A) = mn(N+1)/12$$

9

正規近似値

- ・連続修正した標準得点 z_0 :
 R_A の期待値 $E(R_A)$ と分散 $V(R_A)$ から

$$z_0 = \frac{|R_A - E(R_A)| - 0.5}{\sqrt{V(R_A)}} \\ = \frac{|R_A - m(N+1)/2| - 0.5}{\sqrt{[mn(N+1)/12]}}$$

10

正規近似値による検定

- ・連続修正した標準得点 z_0 :

$$z_0 > 1.96 \quad \text{有意水準 5\% で有意差あり} \\ z_0 < -1.96 \quad \text{態度保留}$$

実際には, z_0 から p 値を計算して,

$$p < 0.05 \quad \text{有意水準 5\% で有意差あり}$$

とする。

11

●タイがある場合の正規近似

- ・同順位 (タイ) がある場合には修正が必要

- ・N個のデータに, k個のタイがある。
- ・各タイには d_1 個, d_2 個, ..., d_k 個のケースが含まれる。

- ・i番目のタイに与える中間順位 s_i :
($i=1, \dots, k$)

$$s_i = (1 + d_i)/2 + \sum_{j=i-1} d_j$$

12

●タイがある場合の順位和の期待値と分散

A 群の順位和 R_A^* の期待値 $E(R_A^*)$
 順位和 R_A^* の分散 $V(R_A^*)$

$$E(R_A^*) = m(N+1)/2$$

$$V(R_A^*) = \frac{mn}{12N(N-1)} [(N^3-N) - \sum_i (d_i^3 - d_i)]$$

13

●タイがある場合の正規近似値

正規近似値 z_0 :

$$z_0 = \frac{|R_A^* - E(R_A^*)|}{\sqrt{V(R_A^*)}}$$

$z_0 > 1.96 \rightarrow 5\%$ 水準で有意差あり

14

例題 (再掲)

表. A 薬と B 薬の投与による下熱日数とその順位

A 薬: 日数	2	2	2	3	3	4	4	4	6	8	*	*
順位	2.5	2.5	2.5	7	7	12	12	12	16	17.5	22	22

B 薬: 日数	2	3	3	3	4	4	5	8	10	*	*	*
順位	2.5	7	7	7	12	12	15	17.5	19	22	22	22

* は下熱せず

15

グループごとの順位和を求める

(1) A 薬と B 薬の区別なく, 全データについて小さい順に順位を付ける。
 同順位のデータには, 中間順位を付ける。

(2) A 薬の順位和 R_A :
 $R_A = 2.5 + 2.5 + 2.5 + 7 + \dots + 22 + 22 = 135$
 B 薬の順位和 $R_B = 165$
 $(U_A = 135 - 12 \times 13/2 = 57)$
 $(U_B = 165 - 12 \times 13/2 = 87)$

16

正規近似のための期待値と分散

- A 薬, B 薬群ともに標本数は12
- 順位和 R_A の期待値 $E(R_A)$:
- 分散 $V(R_A)$:

$$E(R_A) = 12 \times (24+1)/2 = 150$$

$$V(R_A) = \frac{12 \times 12}{12 \times 24 \times 23} \times [(24^3 - 24) - \{(4^3 - 4) + (5^3 - 5) + (5^3 - 5) + (2^3 - 2) + (5^3 - 5)\}] = 290.739$$

17

正規近似による有意差検定

$$z_0 = \frac{|135 - 150|}{\sqrt{290.739}} = 0.880 < 1.96$$

正規近似値 z_0 は, 1.96 より小さいので有意差は認められない。
 $(p = 0.379)$

18

クロス表でカテゴリに順序のある場合

クロス表の一方のカテゴリに順序がある場合、通常のカイ2乗検定より効率がよくなる。

表 A薬とB薬の症状改善について

	著効	有効	不変	悪化	計
A薬	8	10	6	1	25
B薬	3	9	10	4	26
計	11	19	16	5	51

19

中間順位の計算と順位和

- ・タイのある場合のWilcoxonの順位和検定
- ・「著効」の中間順位： $(11+1)/2=6$
- ・「有効」の中間順位： $11+(19+1)/2=21$
- ・「不変」の中間順位： $30+(16+1)/2=38.5$
- ・「悪化」の中間順位： $46+(5+1)/2=49$
- ・A薬群の順位和：

$$R_A^* = 8 \times 6 + 10 \times 21 + 6 \times 38.5 + 1 \times 49 = 538$$

20

順位和の期待値と分散

期待値： $E(R_A^*) = 25 \times (51+1)/2 = 650$

分散：

$$V(R_A^*) = \frac{25 \times 26}{12 \times 51 \times 50} \times (51^3 - 51) - \{ (11^3 - 11) + (19^3 - 19) + (16^3 - 16) + (5^3 - 5) \}$$

$$= 2554.118$$

21

検定のための正規近似値による有意差検定

$$z_0 = \frac{|538 - 650|}{\sqrt{2554.118}} = 2.216 > 1.96$$

正規近似値 z_0 は、1.96より大きいので有意差が認められる。

(参考) χ^2 値=5.108, p値=0.164

22

【練習問題】

スポーツ選手5名と一般人5名について、5分間のランニング後の心拍数(回/分)を測定した。このデータから、ランニング後のスポーツ選手と一般人の心拍数に差があるといえるだろうか。

表 ランニング5分後の心拍数

スポーツ選手	78	70	82	68	65
一般人	90	79	88	92	85

23

ノンパラメトリック検定による多群の比較

慢性前立腺炎患者に無作為に、A、BおよびC薬を投与したところ、表のような結果が得られた。3薬の薬効に差があるといえるだろうか。

表. 3薬の慢性前立腺炎への効果

群	著効	有効	不変	悪化	計
A薬	8	10	6	1	25
B薬	3	9	10	4	26
C薬	3	8	11	3	25
計	14	27	27	8	76

24

検定のための用語と定義

- ・ データが順位で与えられている場合
- ・ グループ数を k , 第 i 群の標本数 n_i , 順位データを $R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{in}$ 順位はグループ内ではなく, 全体の順位
- ・ 順位にタイ (同順位) がある場合, その中間順位を与える。
- ・ 全体で t 種類のタイがあり, 各タイにはそれぞれ d_1, d_2, \dots, d_t 個の同順位のデータが含まれるものとする。

25

順位和と平均値の計算

- ・ 第 i 群の順位和を R_i , 順位の平均を M_{Ri} :

$$M_{Ri} = (R_{i1} + R_{i2} + \dots + R_{ini}) / n_i = R_i / n_i$$

- ・ 全体での平均値 M_R , 全標本数 N :

$$M_R = (N+1) / 2$$

26

Kruskal-Wallis検定統計量

検定のための統計量 K_0 :

$$K_0 = \left[\frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_i n_i (M_{Ri} - M_R)^2 \right] / D$$

$$= \left[\frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_i \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) \right] / D$$

ただし、 $D = 1 - \sum_j (d_j^3 - d_j) / (N^3 - N)$

27

検定の方法

適当な定数 c :

$$K_0 \geq c \rightarrow \text{有意差あり}$$

- ・ 検定のための一般的な数値表を, さまざまなグループ数や各群の標本数に応じて使用できるように作成するのは困難。
(グループ数や標本数が小さい場合のものは作成されている)

28

カイ2乗近似による検定方法

- ・ K_0 : 自由度 $(k-1)$ の χ^2 分布に従う
- ・ 自由度 $(k-1)$ の χ^2 分布の上側 α 点 (5%か1%) の値 $\chi^2_{\alpha}(k-1)$ と K_0 を比較

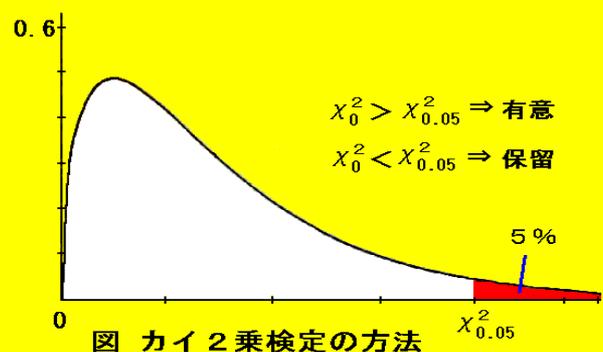
$$K_0 \geq \chi^2_{\alpha}(k-1) \rightarrow \text{有意差あり}$$

または、 p 値を計算し、 $p < 0.05$

- ・ χ^2 分布による近似は, グループ数が3以上で, 各群の標本数が5以上ならばかなりよい。

29

カイ2乗検定の方法



例題(再掲)

慢性前立腺炎患者に無作為に、A、BおよびC薬を投与したところ、表のような結果が得られた。3薬の薬効に差があるといえるだろうか。

群	著効	有効	不変	悪化	計
A薬	8	10	6	1	25
B薬	3	9	10	4	26
C薬	3	8	11	3	25
計	14	27	27	8	76

31

中間順位の計算

各カテゴリに与える中間順位：

- ・ 著効 = $(14+1)/2=7.5$
- ・ 有効 = $14+(27+1)/2=28$
- ・ 不変 = $14+27+(27+1)/2=55$
- ・ 悪化 = $14+27+27+(8+1)/2=72.5$

32

順位和と平均順位の計算

- ・ A群の順位和 R_A 、平均順位 M_{RA} ：
- ・ $R_A=8 \times 7.5+10 \times 28+6 \times 55+1 \times 72.5$
 $=742.5$
- ・ $M_{RA}=R_A/25=29.7$

33

順位和と平均順位の計算2

- ・ B群の順位和 R_B 、平均順位 M_{RB} ：
 $R_B=1114.5$, $M_{RB}=42.865$
- ・ C群の順位和 R_C 、平均順位 M_{RC} ：
 $R_C=1069$, $M_{RC}=42.76$
- ・ 全体の平均順位 M_R ：
 $M_R=(76+1)/2=38.5$

34

タイのための修正項の計算

タイのある場合の修正項 D：

$$D=1-\frac{(14^3-14)+(27^3-27) \times 2+(8^3-8)}{76^3-76}$$
$$=0.90306\dots$$

35

検定統計量の計算

$$K_0=\frac{12}{76 \times 77} \times [25 \times (M_{RA}-M_R)^2 + 26 \times (M_{RB}-M_R)^2 + 25 \times (M_{RC}-M_R)^2] / D$$
$$=6.551$$

$$\text{自由度}=\text{グループ数}-1=3-1=2$$

36

検定統計量と有意水準点との比較

- 自由度 2 の χ^2 分布の上側 5 % 点 5.991, 1 % 点 9.210

$K_0 = 6.551 > 5.991 \rightarrow$ 5%水準で有意差が認められる

(p 値を計算すると, $p = 0.038$)

【結論】少なくとも 1 つの薬剤の効果は他と異なるものと考えてよい。

37

順位和に基づく多重比較

- シェッフェの方法により, 順位和を用いた一般的な対比の方法
- 用いる記号等は全て一元配置分散分析の場合と同様
- グループ数を k , 第 i 群の標本数を n_i , 全データについて順位づけした場合の第 i 群における順位和を R_i , 平均を M_{Ri}

38

順位和に基づく多重比較2

検定統計量:

$$\chi_0^2 = \frac{(\sum_i w_i \cdot M_{Ri})^2}{\left[\frac{D \cdot N(N+1)}{12} \cdot \sum_i \frac{w_i^2}{n_i} \right]}$$

ここで, D はタイのある場合の修正項, N は総標本数。ただし, $\sum_i w_i = 0$

39

順位和に基づく多重比較3

- χ_0^2 が自由度 $(k-1)$ の χ^2 分布に従う。
- 自由度 $(k-1)$ の χ^2 分布の上側 α 点 $\chi_{\alpha}^2(k-1)$

$\chi_0^2 \geq \chi_{\alpha}^2(k-1) \rightarrow$ そのグループ間に有意差あり

- 2 グループを比較する場合, 一方の重みを 1 とし, 他方を -1, 比較に用いないものの重みは 0 とすればよい。

40

例題の計算

- 各検定で必要な計算のうち, 共通する部分の計算をまず行う:

$$V = D \times N \times (N+1) / 12 \\ = 0.90306 \times 76 \times 77 / 12 = 440.392$$

41

1) A 群と B 群の差

A 群と B 群の重みを 1 と -1 とする:

$$\chi_{A \cdot B}^2 = \frac{(M_{RA} - M_{RB})^2}{V \times [1^2/25 + (-1)^2/26]} = 5.061$$

- この値と自由度 2 の χ^2 分布の上側 5 % 点の値 5.991 と比べる。
 $\chi_{A \cdot B}^2$ の方が小さいので有意とはいえない。

42

2) A群とC群の差

A群とC群について：

$$\chi_{A \cdot C}^2 = \frac{(M_{RA} - M_{RC})^2}{V \times \{1^2/25 + (-1)^2/25\}} = 4.841$$

- ・この値と自由度2の χ^2 分布の上側5%点の値5.991と比べる。
 $\chi_{A \cdot C}^2$ の方が小さいので有意とはいえない。

43

3) B群とC群の差

B薬群とC薬群について：

$$\chi_{B \cdot C}^2 = \frac{(M_{RB} - M_{RC})^2}{V \times \{1^2/26 + (-1)^2/25\}} = 0.000$$

- ・この値と自由度2の χ^2 分布の上側5%点の値5.991と比べる。
 $\chi_{A \cdot C}^2$ の方が小さいので有意とはいえない。

44

4) A群とB・C群の差

A群：1の重み、B・C群：各-1/2の重み

$$\chi_{A \cdot BC}^2 = \frac{[M_{RA} - 0.5 \times (M_{RB} + M_{RC})]^2}{V \times \{1^2/25 + (-1/2)^2 \times (1/26 + 1/25)\}} = 6.549$$

- ・この値は自由度2の χ^2 分布の上側5%点の値5.991より大きいので、**有意差**がある。

45

5) B群とA・C群の差

B群：1の重み、A・C群：各-1/2の重み

$$\chi_{B \cdot AC}^2 = \frac{[M_{RB} - 0.5 \times (M_{RA} + M_{RC})]^2}{V \times \{1^2/26 + (-1/2)^2 \times (1/25 + 1/25)\}} = 1.710$$

- ・この値は自由度2の χ^2 分布の上側5%点の値5.991より小さいので、有意ではない。

46

6) C群とA・B群の差

C群：1の重み、A・B群：各-1/2の重み

$$\chi_{C \cdot AB}^2 = \frac{[M_{RC} - 0.5 \times (M_{RA} + M_{RB})]^2}{V \times \{1^2/25 + (-1/2)^2 \times (1/25 + 1/26)\}} = 1.598$$

- ・この値は自由度2の χ^2 分布の上側5%点の値5.991より小さいので、有意ではない。

47

例題の検定結果

検定結果からは、各2群間に有意差は認められないが、B薬群とC薬群をこみにした場合、A薬群と有意差が認められた。

したがって、A薬が3薬の中では最も効果があるものと考えてよいだろう。
また、これは1)、2)で求めた χ^2 値が有意ではないが、かなり大きな値となっていることも符合している。

48